原子核配对壳模型 SD 对结构与相互作用强度的关联*

包莉娜[1]，李磊[2]

1（陆军炮兵防空兵学院基础部，安徽省　合肥市　230031）；
2（南开大学物理科学学院，天津市　300071）

摘要： 基于原子核配对壳模型［Nucleon-pair shell model(NPSM)］，将其截断到 SD 对子空间，采用两种不同的 SD 对构建方案对 Ba 同位素的低激发态的能谱、波函数结构及电磁性质进行了研究。这两种构建方案分别是 SDI 方法和 TDA 近似方法。研究结果显示，它们互有优劣，没有绝对的优势性方案：运用这两种构建 SD 对结构的方案，均可得到与实验值接近的结果，中子空穴对数越多，实验值和理论值符合得越好；均可发现 Ba 同位素链电磁跃迁强弱和波函数结构间存在内在联系的结果。在能谱性质的描述中，SDI 方法的晕带及准-γ 带拟合的理论值总体上与实验值更接近；TDA 方法改善了 SDI 对 Ba 同位素链能谱描述中第二个 0^+态能量过低及第一个 3^+态能量过高的不足。在电磁性质描述中，TDA 方法拟合得更好。此外，采用 SDI 方案构建 SD 对结构时，选择合适的相互作用强度可以提高理论计算精度。

关键词： 原子核配对壳模型；能谱；电磁跃迁；集体对
中图分类号： （O571.21）　　**文献标志码：** **A**　　**doi：**

1　引言

原子核具有丰富的集体运动规律，已经被多年以来的实验揭示。目前，已有相关的模型理论对原子核的集体性质进行描述，并取得了一定的成功。而采用壳模型对此进行研究受到了广泛关注。原子核壳模型包含核子的所有自由度，能够反映原子核的基本性质，所以，原则上壳模型能够描述原子核的集体运动。在原子核结构研究领域，原子核的壳层模型也是最成功的模型之一。随着计算机技术的迅猛发展，壳模型哈密顿量能够被对角化的空间逐步增大。然而，当原子核满壳层外价核子数目及单 j 壳层数目增多时，壳模型组态空间会变得庞大，大到一定程度时，即使有现代高性能计算机的帮助，壳模型哈密顿量也很难直接被对角化[1]。为了解决这个问题，人们对模型空间进行了截断。陈金全提出的原子核配对壳模型[Nucleon-pair shell model(NPSM)] [2]就允许很多种模型空间的截断形式。

收稿日期： 2024-09-15; **修改日期：** 2024-10-08; **录用日期：** 2024-12-09;
作者简介： 包莉娜, 博士； E-mail:bwrnn@126.com

值得一提的是，相互作用玻色子模型（IBM）[3]将集体 S 对和 D 对分别近似为 s、d 玻色子，它已经取得了非常大的成功[4]，这说明了将模型空间截断在 SD 对子空间的可行性[5-6]。因此，在 NPSM 中，将壳模型空间截断为角动量量子数为 0 和 2 的集体对，可得到 SD 对壳模型［Nucleon-pair shell model（SDPSM）］[7-8]。研究表明，NPSM 截断后能够很好的再现 IBM 的经典极限谱[8-9]，即它对原子核低激发能谱的集体性质具有很好的截断效应[10-14]。关于这方面的工作已经取得一定进展，根据前人的研究，可总结出这样的结论：对于 SDPSM，原子核低激发谱集体性质在很大程度上受到 SD 对结构系数的影响，在两粒子（两个中子或两个质子）构成的系统中通过对角化表面 δ 相互作用，并取第一个 0^+态和第一个 2^+态分别作为 S 对和 D 对，能很有效的描述原子核低激发态的集体性质[9]，此方法简称为 SDI 方法。在运用此方法研究的过程中发现一些问题，如，第二个 0^+态能量过低，第一个 3^+态能量过高等问题。我们运用 SDI 方法重新拟合了相关参数，改进了拟合结果，进一步通过拟合参数分析 NPSM 中对结构对原子核集体性质的影响。在集体对的选取研究中取得了进展，综述文献[15]中概述了壳模型配对理论和集体对选取方法在形变原子核研究中的最新进展，文献[16]和[17]分别提出了 Hartree-Fock 方法和共轭梯度方法作为新的集体对选取方法。如上提及的运用 SDI 方法出现的问题涉及的其它原因在于构建 SD 对结构时忽略了原子核的多体效应，研究者为了解决这个问题，在构建 SD 对结构时运用了考虑多体效应的变分法和质子-中子 Tamm-Dancoff 近似（TDA），对拟合结果进行了改进。TDA 方法首先通过变分原理确定 S 对结构系数，再通过破缺对方法确定 D 对结构系数。文献[18]将类似的方法结合壳模型有效相互作用确定集体对结构系数，对比文献[15,16,17,18]中的方法，本文所采用的 TDA 方法的优势在于其变分同时考虑了价质子与价中子的贡献，而文献[15,16,17,18]的变分仅考虑同种价核子。本文将 NPSM 截断到 SD 对子空间下，从而得到 SD 对壳模型［SD-pair shell model（SDPSM)］，采用 SDI 和 TDA 两种方法构建 SD 对结构，将这两种方法与相互作用强度的关系[9,10]进行比较分析，进一步讨论 NPSM 的截断效应。

2　理论模型

为了突出研究问题的本质，避免不必要的复杂细节分析，选取简单的哈密顿量，其包括三项，分别表示单粒子能、同类核子间的相互作用以及质子与中子间的四极-四极相互作用

$$H = H_0 - V(\sigma) - \kappa Q_\pi^2 \cdot Q_\nu^2 \tag{1}$$

其中 $\sigma = \pi, \nu$。若用 ε_a 表示单粒子能级，用 $\hat{n}_{a\sigma}$ 表示粒子数算符，则单粒子能 H_0 具有如下形式

$$H_0 = \sum_{a\sigma} \varepsilon_{a\sigma} \hat{n}_{a\sigma} \tag{2}$$

相互作用 $V(\sigma)$ 取同类核子间的表面 δ 相互作用[19]

$$V(\sigma)=V_{\mathrm{SDI}}(\sigma)=4\pi G_\sigma \sum_{i>j=1}^{n}\delta(\Omega_{ij}) \tag{3}$$

$$V_{\mathrm{SDI}}=\frac{G}{4}\sum_{s=0,1,2,\cdots} A_{\mathrm{SDI}}^{s\dagger}\cdot A_{\mathrm{SDI}}^{s} \tag{4}$$

$A_{\mathrm{SDI}}^{\dagger}$ 为表面 δ 相互作用的理想对[20]。

四极算符定义为

$$Q_\mu^2=\sum_{i=1}^{n} r_i^{\,2} Y_{2\mu}(\theta_i\phi_i) \tag{5}$$

二次量子化形式为

$$Q_\mu^2=\sum_{cd} q(cd2)P_\mu^2(cd) \tag{6}$$

若 e_π 与 e_ν 分别为质子和中子的有效电荷，则 $E2$ 跃迁算符为

$$T(E2)=e_\pi Q_\pi^2+e_\nu Q_\nu^2 \tag{7}$$

M1 跃迁算符表示如下

$$T(\mathrm{M1})=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sum_{\rho=\pi,\nu}\left\{g_{l,\rho}^{\mathrm{eff}}\sum_{i\in\rho} l_i+g_{s,\rho}^{\mathrm{eff}}\sum_{i\in\rho} s_i\right\} \tag{8}$$

上式中 $g_{l,\rho}^{\mathrm{eff}}$ 表示轨道 g 因子， $g_{s,\rho}^{\mathrm{eff}}$ 表示自旋 g 因子。关于轨道及自旋 g 因子目前尚未有足够多的实验结果将它们唯一地确定下来，依据前人的工作结果[16]对它们作出这样的规定，$g_{l,\rho}^{\mathrm{eff}}=g_{l,\rho}^{\mathrm{free}}$， $g_{s,\rho}^{\mathrm{eff}}=0.7g_{s,\rho}^{\mathrm{free}}$ 。轨道角动量算符和自旋算符可写成集体偶极算符形式

$$\begin{aligned} L_\sigma &\equiv Q_\sigma^1=\sum_{cd} q(cd1)P_\sigma^1(cd) \\ S_\sigma &\equiv Q_\sigma'^1=\sum_{cd} q'(cd1)P_\sigma^1(cd) \end{aligned} \tag{9}$$

$q(cd1)$ 及 $q'(cd1)$ 分别表示为

$$\begin{aligned} q(cd1)&=(-1)^{l+1/2+d}\sqrt{\frac{l(l+1)}{3}}\hat{c}\hat{d}\hat{l}\begin{Bmatrix} c & d & 1 \\ l & l & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \\ q'(cd1)&=(-1)^{l+1/2+c}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{c}\hat{d}\begin{Bmatrix} c & d & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & l \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

本文研究 NPSM 的截断效应，可通过模型空间截断在 SD 对子空间的可行性进行分析，这样模型空间由集体 SD 对构成，根据如下定义给出集体 SD 对

$$S^{\dagger}=\sum_{a} y(aa0)(C_a^{\dagger}\times C_a^{\dagger})^0$$
$$D^{\dagger}=\sum_{ab} y(ab2)(C_a^{\dagger}\times C_b^{\dagger})^2 \tag{11}$$

如果考虑原子核的多体效应，将通过变分法构建 S 对结构

$$\delta\frac{\left\langle S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu}}\left|H\right|S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu}}\right\rangle}{\left\langle S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu}}\left|S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu}}\right.\right\rangle}=0 \tag{12}$$

若考虑原子核的多体效应和选取的哈密顿量的形式，根据 TDA 近似，则可构建 D 对结构

$$\left|\tau_l^{\pi}2m\right\rangle=\left|S_{\nu}^{N_{\nu}}S_{\pi}^{N_{\pi}-1}D_l^{\pi}\right\rangle,\ l=1,2,\cdots,n^{\pi},$$
$$\left|\tau_k^{\nu}2m\right\rangle=\left|S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu}-1}D_k^{\nu}\right\rangle,\ l=1,2,\cdots,n^{\nu}, \tag{13}$$

公式（13）中 n^{σ} 为非集体对的数目， $D_k^{\sigma\dagger}$ 表示非集体对

$$D_k^{\sigma\dagger}=(C_i^{\dagger}\times C_j^{\dagger})_M^2,\ \sigma=\pi,\nu,\ i\le j \tag{14}$$

i、 j 表征某一主壳层内的单粒子轨道。在空间 $\left\{\left|S_{\nu}^{N_{\nu}}S_{\pi}^{N_{\pi-1}}D_l^{\pi}\right\rangle,\left|S_{\pi}^{N_{\pi}}S_{\nu}^{N_{\nu-1}}D_k^{\nu}\right\rangle\right\}$ 内将哈密顿量对角化，从而得到本征波函数

$$\psi_{2m}=\sum_{k=1}^{n^{\nu}}C_k^{\nu}\left|\tau_k^{\nu}2m\right\rangle+\sum_{l=1}^{n^{\pi}}C_l^{\pi}\left|\tau_k^{\pi}2m\right\rangle \tag{15}$$

定义

$$C_{ij}\equiv C_k^{\nu}\ \text{或}\ C_{ij}\equiv C_l^{\pi} \tag{16}$$

其中 C_k^{ν} 和 C_l^{π} 为 $\left|2_1^{+}\right\rangle$ 态的展开系数，进而得出 D 对的结构系数

$$y(ij2)=\frac{1+\delta_{ij}}{2}C_{ij}=\begin{cases}C_{ij},\ i=j\\ \frac{1}{2}C_{ij},\ i\ne j\end{cases} \tag{17}$$

这样就可以通过 TDA 近似方法构建 D 对结构

$$D^{\dagger}=\sum_{ij} y(ij2)(C_i\times C_j)^2 \tag{18}$$

这样，通过上述 TDA 方法就构建了集体 S 对和集体 D 对结构。

NPSM 模型哈密顿量各项矩阵元都能够通过两个多对基的重叠积分构建出来，N 对基的重叠积分的递推关系为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle s_1 s_2 \cdots s_N; J_1' \cdots J_{N-1}' J_N \middle| r_1 r_2 \cdots r_N; J_1 \cdots J_N \right\rangle = \\
&(\hat{J}_{N-1}' / \hat{J}_N)(-)^{J_N + s_N - J_{N-1}'} \sum_{k=N}^{1} \sum_{L_{k-1} \cdots L_{N-1}} H_N(s_N) \cdots H_{k+1}(s_N) \times \\
&\Big[\psi_k \delta_{L_{k-1}, J_{k-1}} \left\langle s_1 \cdots s_{N-1}; J_1' \cdots J_{N-1}' \middle| r_1 \cdots r_{k-1}, r_{k+1} \cdots r_N; J_1 \cdots J_{k-1} L_k \cdots L_{N-1} \right\rangle + \\
&\sum_{i=k-1}^{1} \sum_{L_i \cdots L_{k-2}} \left\langle s_1 \cdots s_{N-1}; J_1' \cdots J_{N-1}' \middle| r_1 \cdots r_i' \cdots r_{k-1}, r_{k+1} \cdots r_N; J_1 \cdots J_{i-1} L_i \cdots L_{N-1} \right\rangle \Big]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中，$\hat{J} = \sqrt{2J+1}$，$H_k(s_N)$ 为 Racah 系数，ψ_k 由 $A^{r_k \dagger}$ 与 $A^{s_N \dagger}$ 的结构系数决定。r_i' 代表新的集体对 $A^{r_i' \dagger}$，其结构系数由 $A^{r_k \dagger}$、$A^{r_i \dagger}$ 及 $A^{s_N \dagger}$ 的结构系数决定。公式的中间角动量量子数 $L_i \cdots L_{k-2} L_{k-1}$ 与 $L_i'(i' = i \cdots k-2, k-1)$ 是公式右边括号里面的前 i' 对的角动量。由此可见，公式（19）右边已经表示为 $N-1$ 对基的重叠积分形式。根据这样的递推关系，涉及到的每个多对基的重叠积分均可得到[1,8,21]。

3 结果

3.1 相互作用强度随中子数的变化趋势

模型哈密顿量中单粒子能级项为 $H_0 = H_0^{\exp}(\pi) + H_0^{\exp}(\nu)$，式中质子与中子单粒子能级 ε_π 和 ε_ν 取值如表 1 所示。

表 1 质子与中子的单粒子能级[22,23]（MeV）

	$g_{7/2}$	$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	$h_{11/2}$	$s_{1/2}$
ε_π	0	0.963	2.69	2.76	2.99
	$d_{3/2}$	$h_{11/2}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	$g_{7/2}$
ε_ν	0	0.242	0.332	1.655	2.434

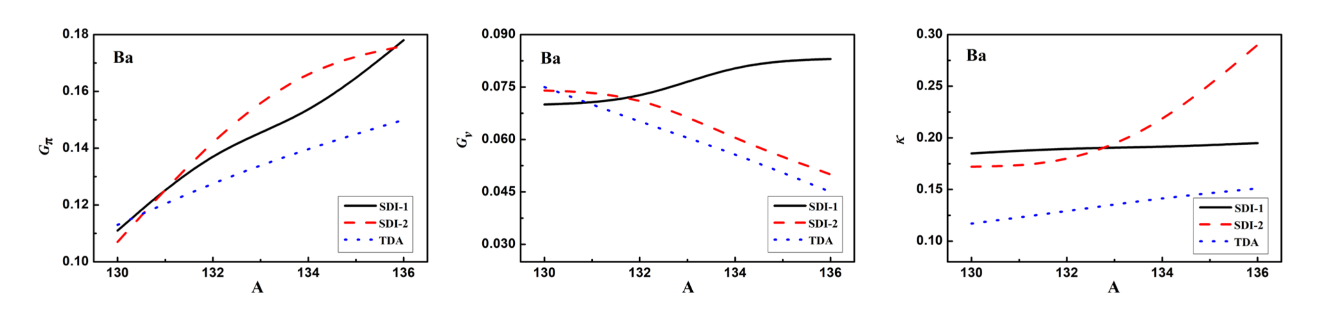


图 1 采用不同方法拟合得到的 Ba 同位素的相互作用强度值，其中：SDI-1 表示调整后拟合的相互作用强度数值，采用 SDI 方法；SDI-2 表示文献[9]中拟合的相互作用强度数值，采用 SDI 方法；TDA 表示采用 TDA 近似方法拟合的相互作用强度数值[10]

我们选取 Ba 同位素进行研究，运用表面 δ 相互作用构建 S 对与 D 对结构，通过拟合低激发态能量、

B(E2)值和B(M1)值确定了G_π、G_ν与κ三个相互作用强度的具体数值，并与文献[9]中的三个相互作用强度值以及拟合结果作比较分析。运用文献[10] TDA 近似方法拟合这些核素的集体性质也确定了这三个强度参数值。现将这三组参数值一起放入图 1 中进行比较分析，研究在利用表面δ相互作用构建 S 对与 D 对结构的情况下相互作用强度对拟合结果的影响，并与 TDA 近似方法[10]的拟合结果进行比对。

从图 1 能够明显的看出， 在 SDI-1、SDI-2、TDA 对应的三种拟合结果中，Ba 同位素拟合的参数值均随着中子数的增加几乎单调的变化，这种变化是平缓的，而且这些拟合得到的每种核素的相互作用强度G_π均大于G_ν。其原因在于质子的单粒子能级劈裂比中子空穴的单粒子能级劈裂大，单粒子能级劈裂能够破坏核子集体运动，对于质子而言就需要一个更大的 SDI 力。在用 SDI 近似处理方法拟合参数的过程中，发现在三种相互作用强度增幅相同时，质子之间相互作用强度对核素能谱、电磁跃迁的理论预言值的改变影响更大。从图 1 中也可发现，随着核子数的单调变化，质子之间相互作用强度曲线在三种相互作用强度中最陡，可见在核子数变化量相同时质子之间相互作用强度变化得更多。

从整体上看，三组相互作用强度参数值中用 TDA 近似方法拟合得到的相互作用强度数值相对偏低。原因在于 TDA 近似考虑了多体效应，合理的包含了核子对之间的多体关联。而图 1 中 SDI-1、SDI-2 对应的 SDI 近似方法未考虑多体效应，这就需要更强的同类核子之间的相互作用及质子与中子之间的相互作用进行弥补。

在三种情形下拟合 Ba 同位素能谱和跃迁强度时，核子对数最多的^{130}Ba 的同类核子之间的三个相互作用强度最为接近。随着核子数目的减少，SDI 与 TDA 两种方法拟合的同类核子之间的相互作用强度差距逐渐增大，质子之间的相互作用强度差距变化的最明显。关于这个问题的原因可以这样分析，SD 对近似截断的效果受到单粒子能量和剩余相互作用的共同影响，如果单粒子能量比剩余相互作用大很多，核子会相对独立的运动。此时，各种角动量的核子对均近似简并而处于等价地位，于是就需要考虑各种角动量的核子对才能通过 NPSM 对核素性质进行描述，所以，SD 对近似截断就不够理想。而当核子对数增加时，同类核子之间的有效相互作用增加，SD 对截断就越来越有效，与此同时，在 TDA 近似中，核子对之间的多体关联作用就不像在核子相对少的核素中体现的那么明显。

如上提到，对于^{130}Ba 核素，图 1 中 SDI-1、SDI-2 和 TDA 三种情况拟合的参数值比 Ba 其它核素的参数值更接近，另外，G_π- SDI-1（表示用 SDI 近似处理方法拟合得到的对力强度）与G_π-TDA（用文献[10] TDA 近似处理方法拟合得到的对力强度）差距更小。用G_π- SDI-1 拟合出的^{130}Ba 核素能谱值从整体上看，略优于用G_π-SDI-2 拟合得到的结果[9]（见图 1）。其原因是，在 SDI 方法中构建 SD 对结构时，未考虑核子间的多体效应，这就需要更强的同类核子之间的相互作用及质子与中子之间的相互作用进行弥补，整体上，同类核子间相互作用强度、质子−中子间相互作用强度的增幅 SDI-1 的增幅最大，SDI-1 相互作用强度的增大一定程度上弥补了未考虑 TDA 近似中核子间多体关联的不足。

由此可见，在描述核素集体性质时，若要运用 SDI 方法得到与 TDA 近似方法可比拟甚至更好的结果，可以通过调整对力强度参数值得以实现。

3.2　相互作用强度对核素能谱的影响

用图 1 中的相互作用参数值，我们计算了 Ba 同位素的能谱，如图 2 所示。从计算结果可以看出，SDPSM 通过 SDI 或 TDA 近似方法均能够得到与 Ba 同位素能谱实验值接近的计算结果，特别是各核素晕带的理论值与实验值更加接近，准-γ 带的理论值与实验值也基本接近。从总体上看，随着中子空穴数的增加，理论值与实验值越来越接近。如图 2 所示，对于空穴对数为 1 的 ^{136}Ba 核素，晕带某些能级的理论值与实验值较为接近，然而，有些能级的理论值（偏离）实验值，如第二个 4^+态、第一个 3^+态、1^+态等；对于空穴对数为 2 的 ^{134}Ba 核素，$J^\pi \leq 8$（宇称为正）时，理论值与实验值较为接近，然而，$J^\pi = 10$ 时，理论值偏离实验值；对于空穴对数为 3 的 ^{132}Ba 核素，$J^\pi \leq 10$ 时，理论值与实验值较为接近，然而，$J^\pi = 12$ 时，理论值与实验值之间就有偏差；对于空穴对数为 4 的 ^{130}Ba 核素能谱（见图 2（*a*）），晕带理论值与实验值很接近，准-γ 带理论值与实验值也很接近。尤其是由 SDI-1 给出的 ^{130}Ba 核素能谱在三个计算结果中与实验值接近程度最高，对于由 SDI-2 给出的 ^{130}Ba 核素的能谱整体上偏低于实验能谱，由调整对力参数后的 SDI-1 计算得到的 ^{130}Ba 核素能级在整体上有所提升，与实验值更为接近，基于 SDI-2 计算得到的 ^{130}Ba 核素晕带的 8^+态、10^+态、12^+态、14^+态的能级值和实验值相比有些偏低，然而，利用 SDI-1 给出的 ^{130}Ba 核素晕带计算结果和实验值非常接近。基于 SDI-1 的 ^{130}Ba 核素的理论值与实验值的接近程度优于在用文献[10]TDA 近似方法计算得到的 ^{130}Ba 核素的结果，例如，由 TDA 近似方法得到的晕带的 14^+态能级偏高，准-γ 带的 8^+态、10^+态和 12^+态的能级也偏高，这种情况在 SDI-1 中得到了改善。

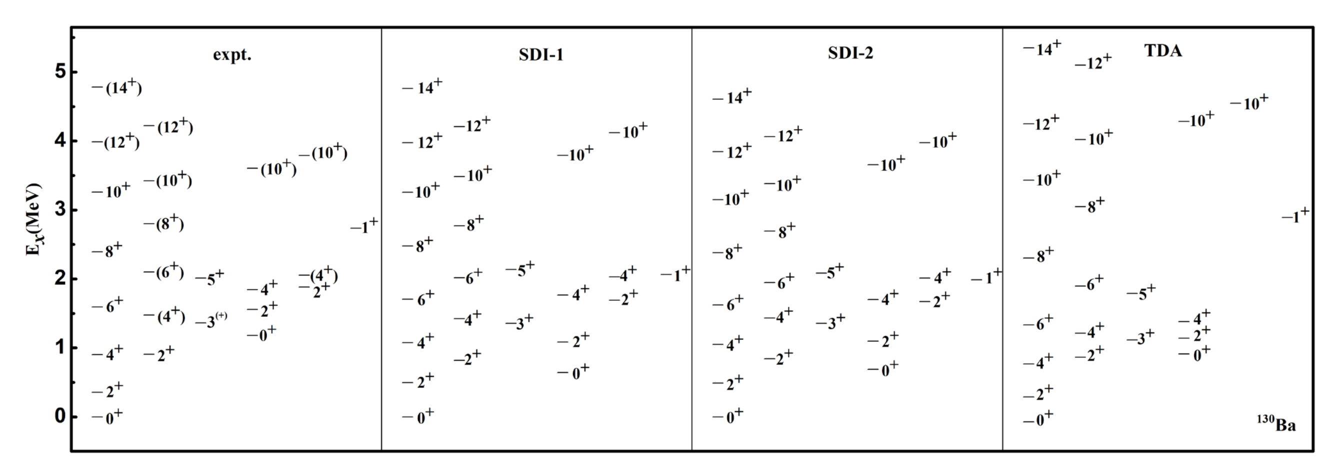


图 2（*a*）　^{130}Ba 同位素能级图。左图为实验值,取自文献[24]，第二幅图给出由 SDI-1 计算得到的能级，第二幅图为用文献[9]中的相互作用强度数值计算得到的 SDI-2 能级图，第四幅图为用 TDA 方法[10]得到的能级图。

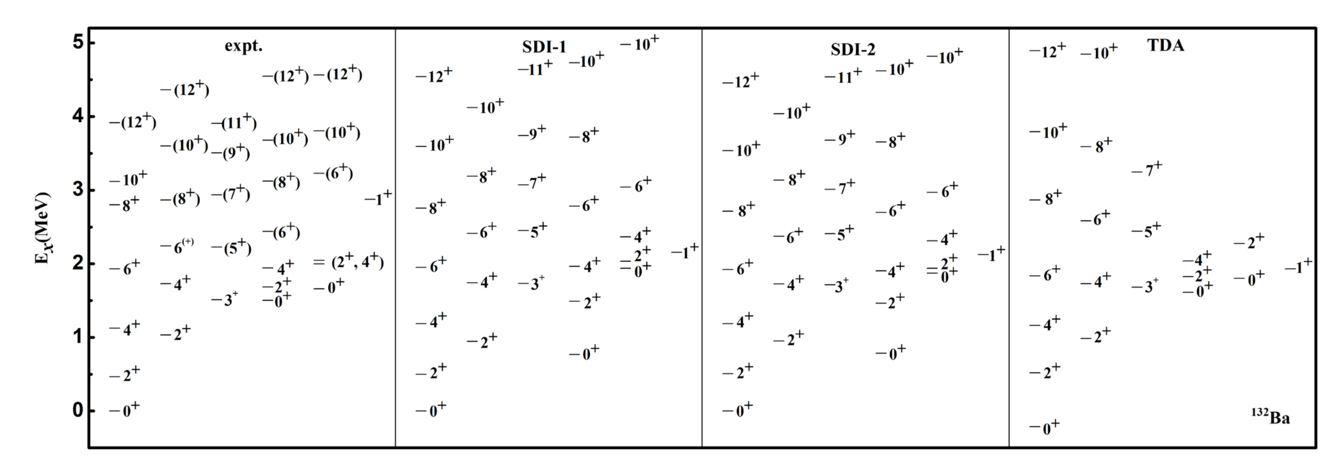


图 2（*b*） ^{132}Ba 同位素能级图 [对一至四图的说明同图 2（*a*）]

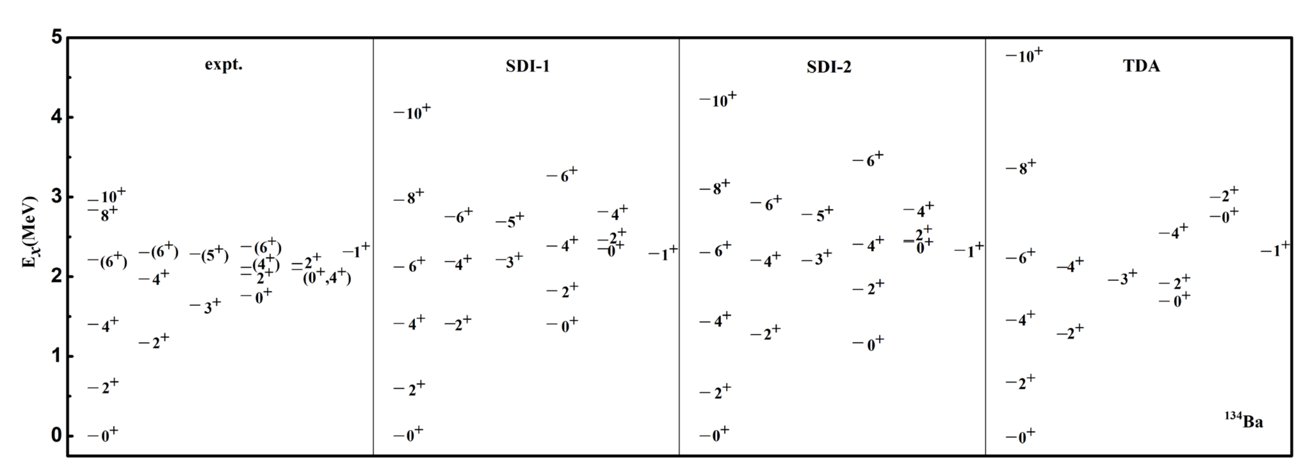


图 2（*c*） ^{134}Ba 同位素能级图 [对一至四图的说明同图 2（*a*）]

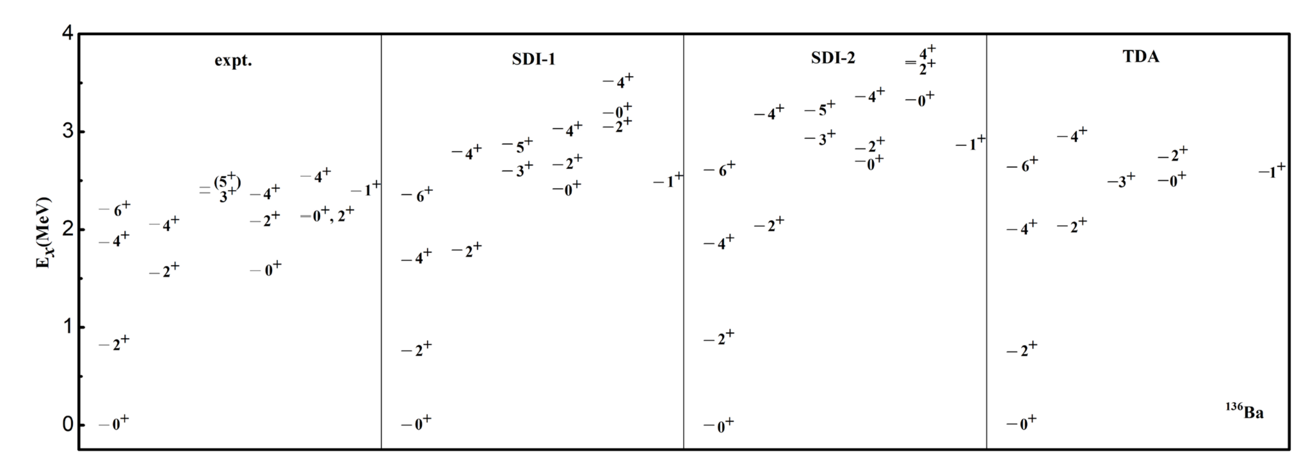


图 2（*d*） ^{136}Ba 同位素能级图 [对一至四图的说明同图 2（*a*）]

前面提到在 SDI-2 的拟合过程中存在第二个 0^+态能量过低，第一个 3^+态能量过高等问题， 通过调整相互作用强度，SDI-1 对 SDI-2 存在的问题改进的不明显，如 ^{136}Ba 核素，SDI-1 给出的第一个 3^+态能量较 SDI-2 的降低了，然而与实验值仍有所偏离；^{134}Ba 核素，SDI-1 给出的第二个 0^+态能量较 SDI-2 的有所上升，但是仍然偏离实验值；^{136}Ba 核素，SDI-1 给出的第二个 0^+态能量虽然较 SDI-2 的相对接近实验值了，但与实验值的偏离程度依然较大。然而，总体上，TDA 方法改善了 SDI 结果中第二个 0^+态能量过低及第一个 3^+态能量过高的不足，如，^{134}Ba 核素，TDA 给出的第一个 3^+态能量较 SDI-2 的降低了，与实验值更接近；^{136}Ba 核素，TDA 给出的第一个 3^+态能量较 SDI-2 的明显降低了，与实验值一致，精确到小数点后 1 位；^{130}Ba、^{132}Ba 核素，TDA 给出的第二个 0^+态能量上升，与实验值更接近；^{134}Ba 核素，TDA 给出的第二个 0^+态能量显著上升，与实验值几乎一致。可见，虽然 SDI-2 较 SDI-1 调整了相互作用强度，但对于第一个 3^+态能量、第二个 0^+态能量的拟合情况依然不如 TDA 方法拟合得好。

总之，在 SDPSM 中，不管是采用 SDI 方法，还是 TDA 方法，随着核子对数的增加，理论值与实验值越来越接近。这是由于 SD 近似处理中理论值与实验值符合得好坏程度和单粒子能量及剩余相互作用的相对大小有关。当核子对数少、平均场能量比剩余相互作用强很多时，核子会处于相对独立的运动状态，每种角动量的核子对的地位都近乎等价，这样截断到 SD 对的近似处理的精确度就不高。当核子对数增加，剩余相互作用增强，SD 对的能量越来越低，SD 对截断处理结果就越来越好。在核子对数较多的情形下，同类核子之间的有效相互作用增强，在 SDI 方法中可以通过同类核子之间相互作用与质子-中子之间的相互作用的改变弥补未考虑 SD 对结构选取时核子对之间多体关联的不足，甚至可以得到优于 TDA 近似方法的某些结果。而对于核子对数较少的情形，剩余相互作用强度随着核子对数的减少而减弱，即使在 SD 对结构选取时考虑了核子对之间多体关联，也未能得到多么好的结果。

值得指出的是，在能谱第二个 0^+态能量和第一个 3^+态能量的拟合情况中，TDA 方法给出了优于 SDI 方法的理论值结果，即使在 SDI-2 中调整了相互作用强度，整体上也未能给出第二个 0^+态能量和第一个 3^+态能量更好的理论值。预测，这可能是由于 TDA 近似方法考虑的核子对之间的多体关联与第二个 0^+态能量和第一个 3^+态能量有着某种特殊的联系。

虽然在能谱的描述中，从晕带到准-γ 带整体上看，SDI 方法给出的结果略好于 TDA 方法给出的结果，但是在后面 3.4 小结提到的核素电磁性质的描述中，TDA 方法给出的结果整体上优于 SDI 方法给出的结果，可见，在构建 SD 对结构时考虑核子间的多体关联对核素电磁性质的描述是有必要的。

3.3 相互作用强度对核素波函数结构的影响

分析由归一但不正交的多对基矢构成的波函数有助于我们理解波函数的结构性质。表 2 给出了 Ba 同位素典型态的波函数的主要分量。多个核子对构成的基矢表示如下

$$
\begin{aligned}
&\left|(D_\pi^\dagger)^{n_\pi}(S_\pi^\dagger)^{N_\pi-n_\pi}(D_\nu^\dagger)^{n_\nu}(S_\nu^\dagger)^{N_\nu-n_\pi};JM\right\rangle \to \left|(D_\nu^\dagger)^{n_\nu}(D_\pi^\dagger)^{n_\pi};JM\right\rangle, \\
&\left|(S_\pi^\dagger)^{n_\pi}(S_\nu^\dagger)^{n_\nu};JM\right\rangle \to \left|S;JM\right\rangle
\end{aligned}
\tag{20}
$$

表 2 括号中基矢的系数表示出现次数高于一次的基矢振幅，如我们用 SDI 方法得到的 ^{130}Ba 核素的第一个 2^+态

$$
\begin{aligned}
\left|2_1^+\right\rangle =& 0.7604\left|D_\nu\right\rangle + 0.6099\left|D_\pi\right\rangle - 0.2043\left|D_\nu^2\right\rangle + 0.3241\left|D_\pi^2 D_\nu\right\rangle_1 + 0.2278\left|D_\pi^2 D_\nu\right\rangle_2 \\
&+0.3119\left|D_\nu^2 D_\pi\right\rangle_1 + 0.3462\left|D_\nu^2 D_\pi\right\rangle_2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

由于在壳模型哈密顿量里不存在潜在的群结构，则在壳模型中这样定义对称态与混合对称态：设一个态的主要分量为

$$
\psi = a_1\left|D_\pi\right\rangle + a_2\left|D_\nu\right\rangle + \cdots \tag{22}
$$

如果 $a_1 \cong a_2$，则称其为单 D 对的对称态；如果 $a_1 \cong -a_2$，则称其为单 D 对的混合对称态。多 D 对的对称态和混合对称态按此进行类推。根据 IBM[4]与 NPSM[9]的研究，在两个对称态间 $E2$ 跃迁强烈，而在混合对称态间 $M1$ 跃迁强烈。

表 2　^{134}Ba 同位素部分波函数的主要分量

核素	态	S	D_ν	D_π	$D_\pi D_\nu$	D_ν^2	D_π^2	$D_\pi^2 D_\nu$	$D_\nu^2 D_\pi$	$D_\nu^2 D_\pi^2$	D_π^3	D_ν^3	$D_\pi^3 D_\nu$	$D_\nu^3 D_\pi$
^{134}Ba	0_1^+	-0.9501			-0.5610	-0.3135								
SDI-1	1_1^+				0.5556			0.3318		0.3980				
	2_1^+		0.7555	0.4814	0.2394				0.3075					
	2_2^+				0.4435	0.6652	0.3003							
	2_3^+		-0.2368	0.3853		-0.2569	0.2985	0.2173						
	2_4^+								0.4388	0.2762				
										(0.2486)				
	4_1^+				0.5372	0.5406	0.3772							
	6_1^+							0.4727	0.3139		0.5439			
核素	态	S	D_ν	D_π	$D_\pi D_\nu$	D_ν^2	D_π^2	$D_\pi^2 D_\nu$	$D_\nu^2 D_\pi$	$D_\nu^2 D_\pi^2$	D_π^3	D_ν^3	$D_\pi^3 D_\nu$	$D_\nu^3 D_\pi$
^{134}Ba	0_1^+	0.8744												
SDI-2[10]	1_1^+				0.5055			0.3639						
	2_1^+		0.7007	0.4634				0.2108	0.2049					
									(0.2562)					
	2_2^+					0.5874	0.3448							
	2_3^+		0.2632	-0.3413		0.3338	-0.2451	-0.2945						
	2_4^+							0.2613	0.3700	0.2659			0.2542	
										(0.2362)				
	4_1^+				0.4656	0.3878	0.3996				0.2514		0.2318	
	6_1^+							0.3944	0.2179		0.6399		0.3424	

研究表明，在 Ba 核素的波函数中，第一个 0+态波函数主要由 S 对凝聚构成，然而仍有相当多的双 D 对混合态，第一个 2^+态、4^+态、6^+态基本上分别为一个、两个、三个 D 对的相干态，所有晕态均为对称态。因此，根据定义，在两个邻近的晕态间会有较强的 E2 跃迁。如表 2 所示，对于 ^{134}Ba 核素，由调整相互作用强度的 SDI-1 给出的第一个 4^+态包括两个 D 对的相干态，其中$\left|D_\nu^2\right\rangle$展开系数为 0.3878，$\left|D_\pi^2\right\rangle$展开系数为 0.3996；利用 SDI-2 得到的第一个 4^+态也包括两个 D 对的相干态，只是两个 D 对的相干态的展开系数不如 SDI-1 的那么接近，$\left|D_\nu^2\right\rangle$展开系数为 0.5406，$\left|D_\pi^2\right\rangle$展开系数为 0.3772。从总体上看，调整相互作用强度后的 SDI-1 给出的晕带对称态更为明显，与此相对应的，计算得到的晕带的 B(E2)也体现出了某些更好的结果。结合图 1 与表 2 的结果， 并将 SDI-1 与 SDI-2 作比较，可以发现 ^{134}Ba 核素同类核子之间的相互作用强度增幅比质子−中子之间相互作用强度增幅大，其晕带对称态表现得更为明显。

3.4 相互作用强度对电磁跃迁的影响

在 B(E2)值的计算中，根据文献[25]，当核素处于 50-82 壳层时，$e_\pi / e_\nu = 1$。经过对 Ba 核素实验数据的拟合，SDI-1 和 SDI-2 选择$e_\pi = e_\nu = 2.1e$，而 TDA 选择$e_\pi = e_\nu = 1.7e$。表 3 列出了 SDI-1、SDI-2 及 TDA 对 B(E2)的理论预言值，通过与实验值的比较分析，可以看出三种情况的 B(E2)的理论预言值和波函数的结构是一致的，即晕态间的跃迁强度较大，而且强度随着中子空穴对数的增加而增大，这与实验值相符合。研究也表明，在某些核素 B(E2)的计算结果中，SDI-1 能够得到三种结果中的最佳值，如 ^{134}Ba 核素的 $B(E2:2_1^+ \to 0_1^+)$ 实验值为 0.136(3) $\mathrm{e^2b^2}$，SDI-1 的理论值为 0.13642 $\mathrm{e^2b^2}$，与实验值非常接近，精确到小数点后 3 位；$B(E2:6_1^+ \to 4_1^+)$ 的实验值为 0.120 $\mathrm{e^2b^2}$，SDI-1 的理论值为 0.12401 $\mathrm{e^2b^2}$，精确到小数点后 2 位，而 SDI-2 理论值为 0.1197 $\mathrm{e^2b^2}$，偏低，TDA 方法理论值为 0.14939 $\mathrm{e^2b^2}$，偏高。参照表 2 可以发现 ^{134}Ba 核素的由调整相互作用强度的 SDI-1 给出的第一个 4^+态中的$\left|D_\nu^2\right\rangle$展开系数为 0.3878，$\left|D_\pi^2\right\rangle$展开系数为 0.3996，其相干性显著体现。由此可以推测，晕带波函数结构对称性体现的越好，其对应的 B(E2)理论值与实验值也就越接近。^{134}Ba 核素的 $B(E2:2_2^+ \to 0_1^+)$ 实验值为 0.003 $\mathrm{e^2b^2}$[25]，SDI-1 的理论值为 0.00264 $\mathrm{e^2b^2}$，该理论值与实验值一致，而 SDI-2 的理论值为 0.001 $\mathrm{e^2b^2}$，偏低。其原因在于，^{134}Ba 核素同类核子之间的相互作用强度增幅比质子−中子之间相互作用强度增幅大，晕带对称态表现得更为明显；从相互作用强度来看，在整体上，由 SDI-1 给出的同类核子之间相互作用强度和质子−中子之间相互作用强度的增幅最大，SDI-1 相互作用强度的增大在一定程度上弥补了未考虑 TDA 近似中核子之间多体关联的不足，就是在 TDA 近似理论值偏高的情况下，SDI-1 的理论值也能与实验值几乎一致。

表 3　Ba 同位素的 B(E2)值（e^2b^2）和 B(M1)值（μ_N^2），实验数据取自文献[25, 26]

	J_i > J_f	^{136}Ba	^{136}Ba(SDI-1)	^{136}Ba(SDI-2)	^{136}Ba(TDA)	^{134}Ba	^{134}Ba(SDI-1)	^{134}Ba(SDI-2)	^{134}Ba(TDA)
实验	$B(E2;2_1^+\to 0_1^+)$	0.080(1)				0.136(3)			
理论	$B(E2;2_1^+\to 0_1^+)$		0.09464	0.0938	0.08514		0.13642	0.1308	0.13321
	$B(E2;4_1^+\to 2_1^+)$		0.07240	0.0803	0.0803		0.15276	0.1613	0.16210
	$B(E2;6_1^+\to 4_1^+)$		0.09218	0.0839	0.09424		0.12401	0.1197	0.14939
	$B(E2;2_2^+\to 2_1^+)$		0.00703	0.0152	0.01100		0.11638	0.1405	0.12538
	$B(M1;2_2^+\to 2_1^+)$		0.09226	0.0611	0.02083		0.02448	0.0127	0.05447
	$B(M1;2_3^+\to 2_1^+)$		0.00905	0.0143	0.00992		0.12247	0.0873	0.26997
	$B(M1;2_4^+\to 2_1^+)$		0.00037	0.0008	0.00143		0.01701	0.0169	0.08465
	$B(M1;2_5^+\to 2_1^+)$		0.00142	0.0097	0.00023		0.00482	0.0125	0.03389
	$B(M1;0_1^+\to 1_1^+)$		0.09512	0.0883	0.04024		0.18112	0.1626	0.52252
	J_i > J_f	^{132}Ba	^{132}Ba(SDI-1)	^{132}Ba(SDI-2)	^{132}Ba(TDA)	^{130}Ba	^{130}Ba(SDI-1)	^{130}Ba(SDI-2)	^{130}Ba(TDA)
实验	$B(E2;2_1^+\to 0_1^+)$	0.172(12)				0.258(28)			
理论	$B(E2;2_1^+\to 0_1^+)$		0.15838	0.1584	0.16569		0.16770	0.1683	0.17709
	$B(E2;4_1^+\to 2_1^+)$		0.21020	0.2102	0.20830		0.21588	0.2186	0.23412
	$B(E2;6_1^+\to 4_1^+)$		0.17865	0.1779	0.19865		0.21005	0.1847	0.23887
	$B(E2;2_2^+\to 2_1^+)$		0.19608	0.1984	0.21393		0.18784	0.2000	0.19846
	$B(M1;2_2^+\to 2_1^+)$		0.01218	0.0126	0.03776		0.01623	0.0143	0.02203
	$B(M1;2_3^+\to 2_1^+)$		0.05141	0.0529	0.26822		0.02253	0.0301	0.33661
	$B(M1;2_4^+\to 2_1^+)$		0.07669	0.0747	0.13577		0.08632	0.1220	0.05810
	$B(M1;2_5^+\to 2_1^+)$		0.02974	0.0266	0.00557		0.10176	0.0870	0.02188
	$B(M1;0_1^+\to 1_1^+)$		0.18077	0.1689	0.56156		0.14676	0.1824	0.58092

再来分析 B(E2)的相对值。研究表明，三种情况下 B(E2)相对值的理论值与实验值符合得较好，在这些理论值中，由 SDI-1 得到的某些结果稍好于其余两种情况得到的结果，如 ^{132}Ba 核素的 $B(E2:3_1^+\to 4_1^+)$ 与 $B(E2:3_1^+\to 2_2^+)$ 的比值，实验值为 73，SDI-1 结果为 38，SDI-2 结果为 36，TDA 近似结果为 30.1；$B(E2:4_2^+\to 4_1^+)$ 与 $B(E2:4_2^+\to 2_2^+)$ 的比值，实验值为 75，SDI-1 结果为 67，SDI-2 结果为 66.5，TDA 近似结果为 95.9；$B(E2:4_2^+\to 2_1^+)$ 与 $B(E2:4_2^+\to 2_2^+)$ 的比值，实验值为 2.2，SDI-1 结果为 2.2，SDI-2 结果为 2.1，TDA 近似结果为 0.3，在这个结果中 SDI-1 的理论值与实验值完全一致。

至于B(M1)值的计算，为了简化计算，根据文献[28]，公式（8）中的$g_{l\pi}$取 1，$g_{l\nu}$取 0，$g_{s\pi}$取 5.586，$g_{s\nu}$取-3.826（它们的单位是μ_N^2）。三种情形的计算结果与波函数结构相一致。对于某些核素，SDI-1 能够给出与实验值更为接近的结果，例如，^{134}Ba 核素的$B(M1:0_1^+\to 1_4^+)$的实验值为 0.022(6)μ_N^2，SDI-1 理论计算值为 0.01809μ_N^2，SDI-2 理论计算值为 0.00305μ_N^2；$B(M1:1_1^+\to 2_2^+)$的实验值为 0.096(18)μ_N^2，SDI-1 理论计算值为 0.08215μ_N^2，SDI-2 理论计算值为 0.07537μ_N^2。考察图 1 相互作用强度值可以发现，将 SDI-1 与 SDI-2 相比，^{134}Ba 核素中子之间相互作用强度增幅比质子之间相互作用强度减幅大，综合起来的影响是，某些情况下，SDI-1 给出的B(M1)值比 SDI-2 给出的B(M1)值略大些，与实验值符合得更好。

表 4　Ba 同位素的 *B*(E2)比值, 实验数据取自文献[25]

	^{134}Ba				^{132}Ba				^{130}Ba			
J_i > J_f	expt.	SDI-1	SDI-2	TDA	expt.	SDI-1	SDI-2	TDA	expt.	SDI-1	SDI-2	TDA
$2_2^+\to 2_1^+$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$\to 0_1^+$	1.1	2.3	0.6	1.1	0.2	0.8	0.9	0.6	5.7	0.9	1.4	5.1
$3_1^+\to 2_2^+$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$\to 4_1^+$	40	18	31	24	73	38	36	30.1	30	46	37	31.8
$\to 2_1^+$	1.0	0.3	2.1	0.6	0.2	2.7	2.2	0.1	1.5	7.1	1.4	5.9
$4_2^+\to 2_2^+$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$\to 3_1^+$	14.5	2.3	1.0	21.7	---	2.9	3.2	1.3	---	10	13	1.9
$\to 4_1^+$	77	15	137	47.1	75	67	66.5	95.9	87	52	53	72.9
$\to 2_1^+$	2.5	157	19	3.2	2.2	2.2	2.1	0.3	3.9	9	2.9	1.1
$0_2^+\to 2_2^+$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$\to 2_1^+$	4	8.7	2.9	21.6	0	7.8	9.5	0	---	10.4	12.8	5.9

4　结论

将 NPSM 截断到 SD 对子空间得到 SDPSM，重点采用 SDI 和 TDA 两种方法构建 SD 对结构，得出结论：这两种方法对 Ba 同位素的描述互有优劣，没有绝对的优势性方案：运用这两种方法均可得到与实验值接近的结果，中子空穴对数越多，实验值和理论值符合得越好；并且，Ba 同位素链电磁跃迁强弱和波函数结构间存在内在联系的结果也都能被研究出来。首先，在描述核素能谱性质时，对于晕带及准-γ 带的拟合，SDI 方法总体上更好；对于第二个 0^+态能量及第一个 3^+态的拟合，TDA 方法总体更优。其次，在核素电磁性质的描述中，TDA 方法拟合得更好，由于其考虑了多体效应。此外，在 SDI 方法中可以通过同

类核子之间相互作用强度与质子-中子之间的相互作用强度的改变来弥补未考虑核子对之间多体关联的不足，甚至可以得到优于 TDA 近似方法的结果。

5 致谢

诚挚感谢国家超级计算天津中心提供的专业支持，这项研究工作的顺利展开依托于其天河一号超级计算机的高性能计算。

参考文献（References）

[1]Caurier E, Martínez-Pinedo G, Nowacki F, *et al*. The shell model as a unified view of nuclear structure [J]. Reviews of Modern Physics, 2006, 77(2): 427. **doi: 10.1103/RevModPhys.77.427**

[2]Chen Jinquan. Nucleon-pair shell model: Formalism and special cases[J]. Nuclear Physics A, 1997, 626(3): 686. **doi: 10.1016/S0375-9474(97)00502-2**

[3]Otsuka T, Arima A, Iachello F. Nuclear shell model and interacting bosons[J]. Nuclear Physics A, 1978, 309(1-2): 1. **doi: 10.1016/0375-9474(78)90532-8**

[4]Iachello F, Arima A. The Interacting Boson Model[M]. New York: Cambridge University Press, 1987： 60-174.

[5]Otsuka T, Arima A, Iachello F. Shell model description of interacting bosons [J]. Physics Letters B, 1978, 76(2): 139. **doi: 10.1016/0370-2693(78)90260-5**

[6]Arima A, Iachello F. Interacting boson model of collective states.1.vibrational limit [J]. Annals of Physics, 1976, 99(2): 253. **doi: 10.1016/0003-4916(76)90097-X**

[7]Luo Yan-An, PAN FENG, DRAAYER JERRY P, NING PING-ZHI. SD-PAIR SHELL MODEL FOR EVEN-EVEN SYSTEMS. International Journal of Modern Physics E, 2008, 17(1): 245. **doi: 10.1142/S0218301308011896**

[8]Zhao Y.M., Yoshinaga N, Yamaji S. Relationship between the fermion aynamical symmetric model Hamiltonian and nuclear collective motion [J]. Physical Review C, 2000, 62(2): 024322-1. **doi: 10.1103/PhysRevC.62.024322**

[9]Luo Yan-An, Chen Jin-Quan, Draayer J.P. Nucleon-pair shell model calculations of the even–even Xe and Ba nuclei [J]. Nuclear Physics A, 2000, 669(1-2): 101. **doi: 10.1016/S0375-9474(99)00818-0**

[10]Chen Jin-Quan, Luo Yan-an. Nucleon-pair shell model: The effects of the SD pair structure on collectivity of low-lying states[J]. Nuclear Physics A, 1998, 639(3-4): 615. **doi: 10.1016/S0375-9474(98)00422-9**

[11]Luo Yanan, Chen Jinquan. Shell model calculation in the S-D subspace [J]. Physical Review C, 1998, 58(1): 589. **doi: 10.1103/PhysRevC.58.589**

[12]Luo Yanan, Pan Feng, Bahri C, *et al*. SD-pair shell model and the interacting boson model[J]. Physical Review C, 2005, 71(4):

4304(1). **doi: 10.1103/PhysRevC.71.044304**

[13]Zhao YM, Yamaji S, Yoshinaga N, *et al.* Nucleon pair approximation of the nuclear collective motion[J]. Physical Review C, 2000, 62(1): 014315-1. **doi: 10.1103/PhysRevC.62.014315**

[14]Jia L Y, Zhao Y M. Systematic calculations of low-lying states of even-even nuclei within the nucleon pair approximation[J]. Physical Review C, 2007, 75(3): 034307-1. **doi: 10.1103/PHYSREVC.75.034307**

[15]Lei Y, Lu Y, Fu G J, *et al.* Advances in the study of nuclear collective rotation using pairing theory in the framework of the shell model [J]. Chin Sci Bull., 2024, 69(25): 3757.

[16]Fu G J, Johnson C W. From deformed Hartree-Fock to the nucleon-pair approximation[J]. Physics Letters B, 2020, 809(10): 135705-1. **doi: 10.1016/j.physletb.2020.135705**

[17]Kaneko K, Shimizu N, Mizusaki T, et al. Quasi-SU(3) coupling of (1h11/2, 2 f7/2) across the N = 82 shell gap: Enhanced E2 collectivity and shape evolution in Nd isotopes[J].Physical Review C, 2021, 103(2): L021301-1.**doi: 10.1103/PhysRevC. 103. L021301**

[18]Xu Z Y, Lei Y, Zhao Y M, *et al.* Low-lying states of heavy nuclei within the nucleon pair approximation[J]. Physical Review C, 2009, 79(5): 054315-1. **doi: 10.1103/PhysRevC.79.054315**

[19]Arvieu R and Moszkowski S A. Generalized seniority and the surface delta interaction[J]. Physical Review C, 1966, 145(3): 830. **doi: 10.1103/PhysRev.145.830**

[20]Van Egmond A, Allaart Klaasa, Bonsignori G. Microscopic approach to magnetic excitations in IBM-2[J]. Nuclear Physics A, 1985, 436(3): 458. **doi: 10.1016/0375-9474(85)90080-6**

[21]Wu Cheng-Li, Feng Da Hsuan, Chen Xuan-Gen. Fermion dynamical symmetry model of nuclei: basis, Hamiltonian, and symmetries[J]. Physical Review C, 1987, 36(3): 1157. **doi: 10.1103/PhysRevC.36.1157**

[22]Fogelberg B, Blomqvist J. Single-hole and three-quasiparticle levels in ^{131}Sn observed in the decay of ^{131g,m1,m2}In[J]. Nuclear Physics A, 1984, 492(2): 205. **doi: 10.1016/0375-9474(84)90205-7**

[23]Baldrige W J. Shell-model studies for the ^{132}Sn region I Few proton cases[J]. Physical Review C, 1978, 18(1): 530. **doi: 10.1103/PhysRevC.18.530**

[24]Bohle D, Richter A, Steffen W. New magnetic dipole excitation mode studied in the heavy deformed nucleus ^{156}Gd by inelastic electron scattering [J]. Physics Letters B, 1984, 137(1-2): 27. **doi: 10.1016/0370-2693(84)91099-2**

[25] FAZEKAS B, BELGYA T, MOLNAR G. LEVEL SCHEME AND MIXED-SYMMETRY STATES OF BA-134 FROM IN-BEAM (N, N'GAMMA) MEASUREMENTS[J]. Nuclear Physics A, 1992, 548(2): 249. **doi: 10.1016/0375-9474(92)90011-8**

[26]Iachello F. New Class of Low-Lying Collective Models in Nuclei[J]. Physical Review Letters, 1984, 53(15): 1427. **doi: 10.1103/PhysRevLett.53.1427**

[27] Casten R F.AN EXTENSIVE REGION OF O(6)-LIKE NUCLEI NEAR A=130 [J]. Physics Letters, 1985, 152(1,2): 22. **doi: 10.1016/0370-2693(85)91131-1**

[28] Zamick L.Collective magnetic dipole transitions in the rotational model: Orthogonalization with respect to the spurious states. [J]. Physics Letters B, 1986, 167(1): 1. **doi: 10.1016/0370-2693(86)90533-2**

Correlation between structural coefficients of SD pairs and interaction strengths in nucleon pair shell model

Bao Li'na[1)] , Li Lei[2)]

1（Department of Basic Sciences, Army Academy of Artillery and Air Defense, Hefei, Anhui 230031, People's Republic of China）

2（Department of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, People's Republic of China）

Abstract: In the framework of the nucleon-pair shell model truncated to an SD collective pair subspace, the effect of the interaction strengths on the low-lying spectra, wave function structures of the eigenstates and electromagnetic (EM) transition strengths of the Barium isotopes （^{130,132,134,136}Ba） is studied systematically. The SDI method and TDA approximation method are adopted to construct the SD pairs. It is shown that they have their advantages and disadvantages, and there is no absolute dominant solution between them for studying Barium isotopes. The results of two methods are both close to the experiment values. It is found that the larger the number of the neutron hole pairs, the better the agreement between the experiments and the calculations. They can all find the results of the internal relationship between the EM transition strengths and the structure for the wave function. In the description of the low-lying spectra for the Barium isotopes, the calculations of the yrast band and the quasi- γ band calculated by SDI method are better generally. But the first 3^+ states are higher than the experiments and the second 0^+ states are lower than the experiments by SDI method. These disadvantages are improved by TDA approximation method. In the description of EM transition strengths of the Barium isotopes, the calculations are better by TDA approximation method which considering multibody effects. Sometimes, the results given by the SDI method could be even better than those calculated with the TDA approximation method by selecting the appropriate interaction strengths.

Key words：Nucleon-pair Shell Model; energy spectrum; electromagnetic transition; collective states.

Received date：2024-09-15；**Revised date**：2024-10-08；**Accepted date**：2024-12-09

1) Bao Li'na, doctor; E-mail: bwrnn@126.com